

Γραμμική Άλγεβρα Ι - Φεβρουάριος 2025

Θέμα 1 (1.5 Μον.)

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 + ax_4 = 1 \\ x_1 + ax_2 - x_3 - ax_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

Θέμα 2 (1.5 Μον.)

Να βρεθεί ισχυρά κλιμακωτός πίνακας γραμμοισοδύναμος με τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

και δείξτε ότι ο A αντιστρέφεται και να βρεθεί ο A^{-1} με χρήση γραμμοπράξεων.

Θέμα 3 (1.5 Μον.)

Για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ τα διανύσματα

$$(a^2, 1, a), (4, 1, 2), (1, 1, 1)$$

είναι βάση του \mathbb{R}^3 ;

Θέμα 4 (2 Μον.)

Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, με

$$T(x, y, z) = (x + y + z, 2x + 2y, x + y - z)$$

(α) Να βρεθεί μία βάση του πυρήνα $\ker T$ της T και μία βάση της εικόνας $\text{Im}T$ της T .

(β) Να βρεθεί ο πίνακας $A = [T]_{\mathcal{B}}$ της T ως προς τη διατεταγμένη βάση $\mathcal{B} = \{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ του \mathbb{R}^3 .

Θέμα 5 (1.5 Μον.)

Ας είναι πίνακες $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ και A αντισρέψιμος πίνακας. Να δείξετε ότι

$$\det(AB + I_n) = \det(BA + I_n).$$

Θέμα 6 (1.5 Μον.)

Έστω V ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος και έστω η γραμμική απεικόνιση $f: V \rightarrow V$ με $f \circ f = 0$.

Να δείξετε ότι $\dim \ker f \geq \frac{1}{2} \dim V$.

Διάρκεια εξέτασης: **3** ώρες.